

Funções de Várias Variáveis

Lista 8: Integrais Duplas em Coordenadas Polares

1. Calcule $\iint_D f(x,y)dA$ em coordenadas polares, em que D é a região de \mathbb{R}^2 indicada em cada item.
 - a) $f(x,y) = xy$; D é o disco com centro na origem e raio 3
 - b) $f(x,y) = \cos(x^2 + y^2)$; D é a região acima do eixo x e dentro da circunferência $x^2 + y^2 = 9$
 - c) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$; D é a região limitada pelo semicírculo $x = \sqrt{4 - y^2}$ e o eixo y
 - d) $f(x,y) = \text{arctg}(y/x)$; $D = \{(x,y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$
2. Utilize uma integral dupla para determinar a área da região interior a ambos os círculos $r = \cos \theta$ e $r = \sin \theta$.
3. Utilizando coordenadas polares:
 - a) Calcule o volume do sólido delimitado pelo hiperboloide $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ e pelo plano $z = 2$.
 - b) Calcule o volume do sólido acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
 - c) Calcule o volume do sólido delimitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e pelo elipsoide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$.
4. Em cada item, calcule a integral integrada, convertendo-as antes para coordenadas polares.
 - a) $\int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \text{sen}(x^2 + y^2) dy dx$
 - b) $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y^2}} (x+y) dx dy$

Gabarito

Questão 1)

a) 0

b) $\frac{1}{2}\text{sen}(9)$

c) $\frac{\pi}{2}(1 - e^{-4})$

d) $\frac{3}{64}\pi^2$

Questão 2)

$\frac{1}{8}(\pi - 2)$

Questão 3)

a) $\frac{4}{3}\pi$

b) $\frac{2\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

c) $\frac{8\pi}{3}(64 - 24\sqrt{3})$

Questão 4)

a) $\frac{1}{2}\pi(1 - \cos(9))$

b) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$