Universidade Federal do ABC
Profa. Dahisy Lima

Funções de Várias Variáveis

Lista 7: Integrais Duplas

1. Em cada item, calcule $\displaystyle\iint_D f(x, y)dA$, em que $D = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$.

   a) $f(x, y) = 1 + 8xy;\ D = [0,1] \times [1,2]$

   b) $f(x, y) = x^2 + y^2;\ D = [2,4] \times [-1,1]$

   c) $f(x, y) = x \sin(y);\ D = [0,\ 2] \times \left[0,\ \pi/2\right]$

   d) $f(x, y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x};\ D = [1,4] \times \left[1,2\right]$

   e) $f(x, y) = \dfrac{xe^x}{y};\ D = [0,1] \times [1,2]$

   f) $f(x, y) = (x - y)^5;\ D = [0,1] \times \left[0,1\right]$

   g) $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + 1};\ D = [0,1] \times \left[-3,3\right]$

   h) $f(x, y) = x \sin(x + y);\ D = [0,\ \pi/6] \times \left[0,\ \pi/3\right]$

   Obs.: Note que nos itens c) e d) a função f pode ser escrita como um produto de funções de uma variável.

2. Determine o volume do sólido que está abaixo do paraboloide elíptico $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + z = 1$ e acima do retângulo $R = [-1,1] \times [-2,2]$.

3. Encontre o volume do sólido delimitado pela superfície $z = x sec^2(y)$ e pelos planos $z = 0, x = 0, x = 2, y = 0$ e $y = \pi/4$.

4. Em cada item, calcule $\iint_D f(x,y)dA$.

a) $f(x,y) = y^2 e^{xy}$; $D = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 4\ ,\ 0 \le x \le y\}$

b) $f(x,y) = x\cos(y)$; D é limitada por $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$

c) $f(x,y) = y^3$; D é limitada por $(0{,}2)$, $(1{,}1)$, $(3{,}2)$

d) $f(x,y) = 2x - y$; D é limitada pelo círculo de centro na origem e raio 2

5. Calcule o volume do sólido abaixo do plano $z = 4x$ e acima do círculo $x^2 + y^2 = 16$. (Dica: faça um esboço do sólido, note que é possível fazer a integração sobre uma parte da região de integração, e multiplicar esse valor por 2.)

6. Calcule o volume V do sólido no primeiro octante $(x, y, z \ge 0)$ limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + z^2 = 4$. Monte as integrais $\iint_D f(x,y)dA$ e calcule seu valor.

7. Calcule a integral trocando a ordem de integração:

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\, dxdy$

b) $\displaystyle\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3 + 1}\, dydx$

c) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 \frac{\sin(y)}{y}\, dydx$

Gabarito

Questão 1)

a) 7

b) $\dfrac{116}{3}$

c) 2

d) $\dfrac{21}{2}\ln 2$

e) $\ln(2)$

Aqui, é preciso usar que $\displaystyle\int_R \frac{1}{t}dt = \ln(t)$ e fazer a integração por partes de $\displaystyle\int_R xe^x dx$.

Uma solução é usar que $\displaystyle\int_R u\ dv = uv - \int_R v\ du$ para $u = x$ e $e^x\ dx = dv$.

f) 0

g) $9\ln 2$

h) $\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}-1) - \dfrac{1}{12}\pi$

Questão 2) $\dfrac{166}{27}$

Questão 3) 2

Questão 4)

a) $\dfrac{1}{2}e^{16} - \dfrac{17}{2}$

b) $\dfrac{1}{2}(1-\cos(1))$

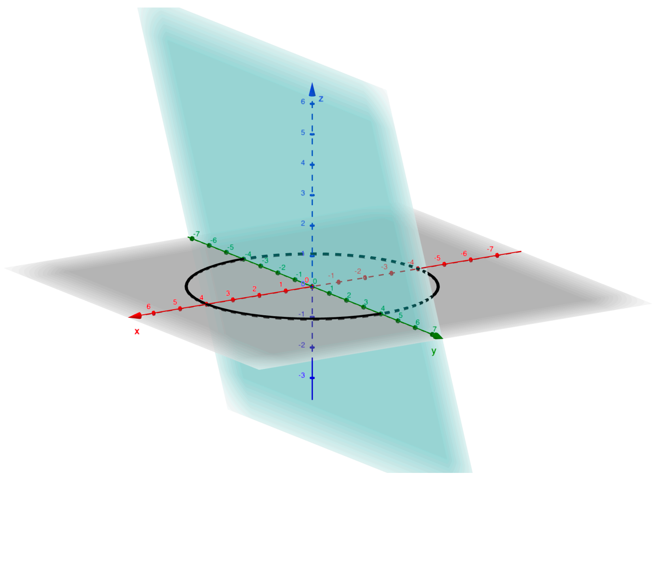
c) $\dfrac{147}{20}$

d) 0

Questão 5)

É importante notar que o sólido está acima do eixo xy e abaixo do plano $z = 4x$, então a região de integração é apenas a do semicírculo em que $x \geq 0$ (veja a figura). E ainda, podemos notar que há uma simetria na região, então podemos calcular o volume sobre um quarto de círculo e multiplicarmos por 2. A integral a ser resolvida pode ser dada por:

$2\displaystyle\int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} 4x\ dydx$ ou. $2\displaystyle\int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-y^2}} 4x\ dxdy$ e é igual a $\dfrac{512}{3}$.



Questão 6)

Aqui, lembre-se de que $x, y, z \geq 0$, de forma que a região de integração está limitada pelos dois eixos coordenados. Se pensarmos no volume abaixo de z, a função a ser integrada será dada por $z = \sqrt{4 - x^2}$ (pois $z \geq 0$), e a região de integração será apenas um quarto do círculo dado por $x^2 + y^2 = 4$. Os limites de integração, portanto, podem ser dados $0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$ e $0 \leq x \leq 2$ (ou análogos invertendo-se x e y.) E a integral a ser resolvida, nesse caso, seria :

$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4 - x^2}\, dy dx$, que é igual a $\frac{16}{3}$.

Questão 7)

a) $\int_0^1 \int_x^1 e^{x^2} dx dy = \frac{1}{2}(e - 1)$.

Aqui, um desenho da região de integração ajuda bastante. Tente enxergar o que significa y variar entre x e 1. Desenhe, no plano xy a reta $y = x$ e destaque a região em que $x \leq y \leq 1$. Agora, tente pensar em outra forma de definir a variação de x e, consequentemente, de y.

b) $\frac{1}{3} \ln 9$

c) $1 - \cos(1)$