Universidade Federal do ABC
Profa. Dahisy Lima

Funções de Várias Variáveis

Lista 4: Regra da Cadeia. Derivação Implícita.

1. Use a Regra da Cadeia para determinar $\dfrac{dz}{dt}$ ou $\dfrac{dw}{dt}$.

   a) $z = x^2y + xy^2$, em que $x = 2 + t^4$ e $y = 1 - t^3$

   b) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, em que $x = e^{2t}$ e $y = e^{-2t}$

   c) $z = ye^x + xe^y$, em que $x = cos(t)$ e $y = sen(t)$

   d) $z = arctg\left(\dfrac{x}{y}\right)$, em que $x = e^t$ e $y = 1 - e^{-t}$

   e) $w = xe^{\frac{y}{z}}$, em que $x = t^2$, $y = 1 - t$ e $z = 1 + 2t$

   f) $w = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, em que $x = sen(t)$, $y = cos(t)$ e $z = tg(t)$

2. Considere uma função f definida por $f(x, y) = ye^x + xe^y$, tal que $y(t) = sen(t)$ e $x(t) = \cos(t)$. Calcule $\dfrac{df}{dt}$ e determine esse valor em $t = \dfrac{\pi}{4}$.

3. Para cada função f abaixo, use a Regra da Cadeia para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial s}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial t}$.

   a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$, em que $x(s, t) = s + t$ e $y(s, t) = st$

   b) $f(x, y) = e^{\frac{y}{x}}$, em que $x(s, t) = 2s\cos(t)$ e $y(s, t) = 4s\text{sen}(t)$

   c) $f(x, y) = e^x\cos(y)$, em que $x(s, t) = st$ e $y(s, t) = \sqrt{s^2 + t^2}$

   d) $f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$, em que $x(s, t) = te^s$ e $y(s, t) = te^{-s}$

   e) $f(x, y, z) = xy + xz + yz$, em que $x(s, t) = s$, $y(s, t) = s\cos(t)$ e $z(s, t) = s\text{sen}(t)$

4. Utilize a Regra da Cadeia para determinar as derivadas parciais indicadas:

a) $z = x^2 + xy^3$, em que $x = uv^2 + w^3$ e $y = u + ve^w$;
Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, $\dfrac{\partial z}{\partial w}$ quando $u = 2,\ v = 1,\ w = 0$.

b) $u = x^2 + yz$, em que $x = pr\cos(\theta)$, $y = pr\,\text{sen}(\theta)$ e $z = p + r$;
Calcule $\dfrac{\partial u}{\partial p}$, $\dfrac{\partial u}{\partial r}$, $\dfrac{\partial u}{\partial \theta}$ quando $p = 2,\ r = 3,\ \theta = 0$.

5. Utilizando a fórmula de derivação implícita, determine $\dfrac{dy}{dx}$.

a) $\sqrt{xy} = 1 + x^2y$

b) $\cos(x - y) = xe^y$

6. Utilizando as fórmulas de derivação implícita, determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$

b) $x - z = \text{arctg}(yz)$

c) $yz = ln(x + z)$

7. Seja f uma função diferenciável de uma variável e seja g uma função de duas variáveis definida por $g(x, y) = f(x^2 + y^2)$. Mostre que $yg_x - xg_y = 0$.

8. Seja $z = f(x - y, y - x)$ com f diferenciável. Mostre que $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

9. Seja $z = f(x, y)$ e suponha que f tenha derivadas parciais de segunda ordem contínuas.

a) Seja $x = r^2 + s^2$ e $y = 2rs$. Determine $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r \partial s}$.

b) Seja $x = r\cos\theta$ e $y = rsen\theta$. Determine $\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta}$.

Gabarito:

1)

a) $\dfrac{dz}{dt} = 4(2xy + y^2)t^3 - 3(x^2 2xy)t^2$

c) $\dfrac{dz}{dt} = \left(\cos(t) - sen^2(t)\right)e^{\cos t} + \left(\cos^2(t) - sen(t)\right)e^{sen(t)}$

e) $\dfrac{dw}{dt} = e^{\frac{y}{z}}\left(2t - \dfrac{x}{z} - \dfrac{2xy}{z^2}\right)$

2) $\dfrac{df}{dt} = \cos(t)\left(xe^y + e^x\right) - \sin(t)\left(e^x y + e^y\right)$, e para $t = \dfrac{\pi}{4}$ essa derivada é igual a zero.

3)

a) $\dfrac{\partial f}{\partial s} = 2x + y + (2y + x)t$; $\dfrac{\partial f}{\partial t} = 2x + y + (2y + x)s$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial s} = \dfrac{4e^{y/x}\sin(t)}{x} - \dfrac{2ye^{y/x}\cos(t)}{x^2}$; $\dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{2yse^{y/x}\sin(t)}{x^2} + \dfrac{4se^{y/x}\cos(t)}{x}$

c) $\dfrac{\partial f}{\partial s} = e^x\left(tcos(y) - \dfrac{s}{\sqrt{s^2 + t^2}}sen(y)\right)$; $\dfrac{\partial f}{\partial t} = e^x\left(scos(y) - \dfrac{t}{\sqrt{s^2 + t^2}}sen(y)\right)$

d) $\dfrac{\partial f}{\partial s} = \dfrac{t(xe^s - ye^{-s})}{x^2 + y^2}$; $\dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{xe^s + ye^{-s}}{x^2 + y^2}$

e) $\dfrac{\partial f}{\partial s} = 2s(\cos(t) + \text{sen}(t)) + s\,\text{sen}(2t)$; $\dfrac{\partial f}{\partial t} = s^2(\cos(t) - \text{sen}(t)) + s^2\cos(2t)$

4)

a) $\left.\dfrac{\partial z}{\partial u}\right|_{u=2,v=1,w=0} = 85$, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial v}\right|_{u=2,v=1,w=0} = 178$, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial w}\right|_{u=2,v=1,w=0} = 54$

b) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial p}\right|_{p=2,r=3,\theta=0} = 36$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{p=2,r=3,\theta=0} = 24$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\right|_{p=2,r=3,\theta=0} = 30$

5)

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4(xy)^{3/2} - y}{x - 2x^2\sqrt{xy}}$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\text{sen}(x - y) + e^y}{\text{sen}(x - y) - xe^y}$

6)

a) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{3yz - 2x}{2z - 3xy}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{3xz - 2y}{2z - 3xy}$

b) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1 + y^2z^2}{1 + y + y^2z^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{z}{1 + y + y^2z^2}$

7) Note que $g_x = f'(x) \cdot 2x$ e $g_y = f'(x) \cdot 2y$, agora basta concluir.

9)

a) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r \partial s} = 4rs\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (4r^2 + 4s^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4rs\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$