

Funções de Várias Variáveis

Lista 3: Derivadas parciais, plano tangente, linearização, diferenciabilidade

1. Determine as derivadas parciais de primeira ordem para as funções abaixo:

a) $f(x, y) = 3x - 2y^4$

h) $f(x, y) = x^y$

b) $f(x, y) = x^5 + 3x^3y^2 + 3xy^4$

i) $w = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)$

c) $z = xe^{3y}$

j) $w = \frac{e^v}{u + v^2}$

d) $f(x, y) = \sqrt{x} \ln(t)$

k) $f(r, s) = r \ln(r^2 + s^2)$

e) $z = (2x + 3y)^{10}$

l) $f(x, t) = \arctg(x\sqrt{t})$

f) $z = tg(xy)$

m) $u = te^{\frac{w}{t}}$

g) $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$

n) $f(x, y) = \int_y^x \cos(t)^2 dt$

2. Seja $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}$. Mostre que a derivada parcial de f em relação a x , é dada por

$$f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{4x}{3}(x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

3. Determine as derivadas parciais de segunda ordem das funções abaixo:

a) $f(x, y) = x^3y^5 + 2x^4y$

c) $f(x, y) = \operatorname{sen}^2(2x + 3y)$

b) $f(x, y) = \cos(xy) + 3xy^2 - 6x^2y$

4. Use a derivação implícita para determinar $\partial z / \partial x$ e $\partial z / \partial y$.

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$

c) $x - z = \arctg(yz)$

b) $yz = \ln(x + z)$

d) $\operatorname{sen}(xyz) = x + 2y + 3z$

5. Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Mostre que $f_x(0, y) = -y$, $\forall y \in \mathbb{R}$ e $f_y(x, 0) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(Dica: use a definição de derivadas parciais, limites.)

6. Considere a função $f(x, y) = 16 - 4x^2 - y^2$. Calcule $f_x(1, 2)$ e $f_y(1, 2)$ e interprete os valores como inclinações de retas. (Determine as curvas cujas retas tangentes são obtidas via derivadas.)

7. Determine a equação do plano tangente à superfície no ponto P especificado:

a) $z = 4x^2 - y^2 + 2y$, $P = (-1, 2, 4)$

b) $z = \sqrt{xy}$, $P = (1, 1, 1)$

c) $z = y \cos(x - y)$, $P = (2, 2, 2)$

8. Plano tangente e "linearização".

a) Encontre uma equação para o plano tangente à superfície dada por $f(x, y) = 4x^2 - y^2 + 2y$ no ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$, em que $x_0 = -1$ e $y_0 = 2$.

b) Determine a linearização $L(x, y)$ de f para $x_0 = -1$ e $y_0 = 2$.

c) Para o plano encontrado em a), determine aproximações para os valores de $z = f(x, y)$ nos pontos $(-1.2, 1.9)$ e $(-0.5, 3)$ e compare com os valores reais.

9. Verifique se as funções abaixo são diferenciáveis em $(0, 0)$, justifique.

a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{2x^6 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

c) $f(x, y) = x^{1/3} \cos(y)$

Gabarito:

1)

a) $f_x(x, y) = 3, \quad f_y(x, y) = 8y^3$

c) $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{3y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3xe^{3y}$

e) $\frac{\partial z}{\partial x} = 20(2x + 3y)^9, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 30(2x + 3y)^9$

g) $f_x(x, y) = \frac{2y}{(x + y)^2}, \quad f_y(x, y) = \frac{-2x}{(x + y)^2}$

i) $\frac{\partial w}{\partial \alpha} = \cos \alpha \cos \beta, \quad \frac{\partial w}{\partial \beta} = -\sin \alpha \sin \beta$

k) $f_r(r, s) = \frac{2r^2}{r^2 + s^2} + \ln(r^2 + s^2) \quad f_s(r, s) = \frac{2rs}{r^2 + s^2}$

m) $\frac{\partial u}{\partial t} = e^{w/t} \left(1 - \frac{w}{t} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial w} = e^{w/t}$

2) Use a definição de derivada parcial por limites para calcular as derivadas parciais em (0,0).

3) a) $f_{xx} = 6xy^5 - 24x^2y, \quad f_{xy} = 15x^2y^4 + 8x^3 = f_{yx}, \quad f_{yy} = 20x^3y^3$

b) $f_{xy} = f_{yx} = -\sin(xy) - xy \cos(xy) - 12x + 6y.$

4) a) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3yz - 2x}{2z - 3xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3xz - 2y}{2z - 3xy}$

c) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1 + y^2z^2}{1 + y + y^2z^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-z}{1 + y + y^2z^2}$

5)

6) $f_x(1,2) = -8; f_y(1,2) = -4$; são inclinações das retas tangentes às curvas $z = 12 - y^2$ no ponto em que $y = 2$ e $z = 12 - 4x^2$, no ponto em que $x = 1$, respectivamente.

7) a) $z = 8x - 2y$

b) $x + y - 2z = 0$

c) $z = y$

8)

a) Equação do plano: $8x + 2y + z = 0$;

b) Linearização: $L(x, y) = -8x - 2y$ (basta isolar z na equação do plano).

c) $f(-1.2, 1.9) = 5.95$, $L(-1.2, 1.9) = 5.8$;

$f(-0.5, 3) = -2$, $L(-0.5, 3) = -2$. (Essa igualdade ocorre por acaso, o plano tangente à superfície no ponto P cruza a própria superfície em outros pontos. Isso não significa que represente uma boa aproximação para a superfície em torno desses pontos.)

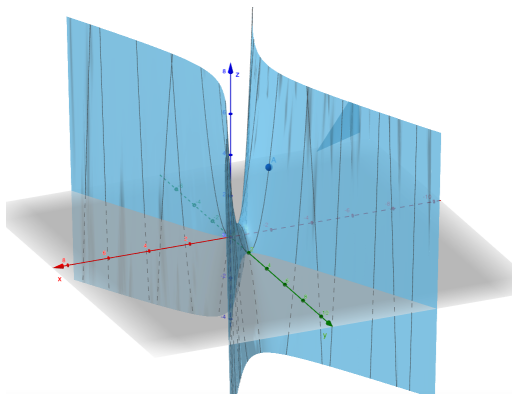
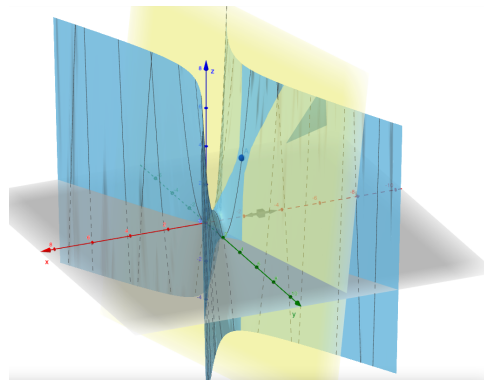


Gráfico de f



Plano tangente à S em $(-1, 2, 4)$

9)

a) Sim.

b) Não, a função não é contínua no ponto, portanto não pode ser diferenciável. Veja o Exercício 4c da lista 2.

c) Não é diferenciável.