

## Funções de Várias Variáveis

### Lista 2: Limites e Continuidade

1. Mostre que os limites abaixo não existem.

a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + 2y^2}$

b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy \cos(y)}{4x^2 + y^2}$

c)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^4y}{4x^6 + y^3}$

**Dica:** Em cada item, mostre isso calculando os valores obtidos quando  $(x, y) \rightarrow (0,0)$  ao longo do eixo  $x$ , do eixo  $y$ , das retas  $y = mx$ ,  $m \in \mathbb{R}^*$  (ou  $y = x$ , se for suficiente), da parábola  $y = x^2$ . (Não é necessário calcular para todos os caminhos, é suficiente parar quando dois valores forem diferentes.)

2. Em cada item, verifique se o limite existe e, nos casos afirmativos, calcule o valor do limite. (Para tanto, utilize as propriedades de limites; utilize os testes de caminhos, se achar necessário; utilize substituição de variável).

a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (5,-2)} x^5 + 4x^3y - 5xy^2$

f)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (6,3)} xy \cos(x - 2y)$

b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,-1)} \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2}$

g)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{xy - y}{(x - 1)^2 + y^2}$

c)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2}$

h)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}$

d)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{6x^3y}{2x^4 + y^4}$

i)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \ln\left(\frac{1 + y^2}{x^2 + xy}\right)$

e)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \sin^2(y)}{x^2 + 2y^2}$

j)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$

3. Em cada item, utilize coordenadas polares para determinar o limite.

a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$

c)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$

b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

d)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{-x^2-y^2} - 1}{x^2 + y^2}$

4. Continuidade de funções.

a)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  é contínua em todo o  $\mathbb{R}^2$ ?

b)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & , \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  determine  $\alpha$  para que a função seja contínua em  $(0, 0)$ . Nesse caso, ela é contínua em todo o  $\mathbb{R}^2$ ? Justifique.

c)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{2x^6 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & , \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  existe  $\alpha$  para que a função seja contínua em

$(0, 0)$ ? Justifique.

(Dica: pense em um caminho (uma curva) um pouco diferente dos que consideramos no Exercício 2.)

d)  $f(x, y) = \frac{xy^4}{x^2 + y^8}$  é descontínua em  $(0, 0)$ . Essa descontinuidade é removível? Ou seja, é possível redefinir a função de modo que ela passe a ser contínua em  $(0, 0)$ ? (Vale a mesma dica do item c) aqui.)

e)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(y - x)}{y - x}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & , \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  é contínua em  $(0, 0)$ ? É contínua em todo o

$\mathbb{R}^2$ ? Se não for, é possível redefinir essa função de forma que ela se torne contínua em todo o  $\mathbb{R}^2$ ?

## Gabarito

1)

- a) Calcule o limite ao longo das curvas  $x=0$  e  $y=0$ .
- b) Calcule o limite ao longo das curvas  $x=0$  e  $y=x$ .
- c) Calcule o limite ao longo das curvas  $y=mk$  e  $y=x^2$

2)

- a) 2025
- b)  $4/3$
- c) 0
- d) Não existe.
- e) 0
- f)  $18 \cos(-3)$
- g) Não existe
- h) 0
- i)  $\ln(1)=0$
- j) 2

3)

- a) 0
- b) 0
- d). -1

4)

- a) Sim.
- b) Alpha deve ser zero.
- d)  $f$  não é contínua na origem. E a singularidade não é removível.