UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Lista 2 - Funções de Várias Variáveis

Limites e Continuidade

1 — Determine o limite, se existir, ou mostre que o limite não existe (justifique!):

(a)
$$\lim_{(x,y)\to(2,-1)} (x^3y + x^2y^3 + 4)$$

(b)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}}{x+1}$$

(c)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2+2}$$

(d)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$$

(e)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

(f)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y}{x^2+y^2}$$

(g)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(x) - 1 - \frac{x^2}{2}}{x^4+y^4}$$

(h)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

(i)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\tan(x)}{x^2+y^2}$$

(j)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{\sqrt{xy+x}}$$

(k)
$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\sqrt[3]{xy}-1}{\sqrt{xy}-1}$$

(l)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

2 —

(a) Mostre que o valor de $\frac{x^3y}{2x^6+y^2}$ tende a 0 quando (x, y) tende a $(0, 0)$ ao longo de qualquer reta $y = mx$, ou ao longo de qualquer parábola $y = kx^2$.

(b) Mostre que
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{2x^6+y^2}$$
não existe, tomando $(x, y) \to (0, 0)$ ao longo da curva $y = x^3$.

3 — Utilize coordenadas polares para determinar os limites(Dica: note que se (r, θ) são as coordenadas polares do ponto (x, y), $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$, $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$, então $r \to 0+$ quando $(x, y) \to (0, 0)$, pois $x^2 + y^2 = r^2$):

(a)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

(b)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

(c)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{-1/(x^2+y^2)}$$

(d)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$$

4 — Esboçe o maior conjunto no qual a função é contínua

(a) $f(x, y) = y\ln(1 + x)$

(b) $f(x, y) = \sqrt{x-y}$

(c) $f(x, y) = \frac{x^2y}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$

(d) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$

(e) $f(x, y) = \arcsin(xy)$

(f) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{2x^2+y^2} & se \ (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & se \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

5 — Encontre o valor de a para que a função dada seja contínua em $(0,0)$:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{xy}\right) & se \ (x,y) \neq (0,0) \\ a & se \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{\sqrt{y^2+1}-1} & se \ (x,y) \neq (0,0) \\ a-4 & se \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2\sin(x)\cos(y)}{x^2+y^2} & se \ (x,y) \neq (0,0) \\ a^2-4a-5 & se \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

6 — Existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(2x)-2x+y}{x^3+y}$?

7 — Mostre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = 1$

8 — É possível definir a função $\frac{\sin(x+y)}{x+y}$ no ponto $(0,0)$ de tal modo que ela seja contínua?

9 — Idem para a função $\frac{xy}{x^2+y^2}$.

10 — Calcule

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x+h,y+k)-f(x,y)-2xh-k}{\sqrt{h^2+k^2}},$$

em que $f(x,y) = x^2+y$.

11 — Seja $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & se \ (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & se \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Mostre que f é contínua em $(0,0)$.

12 — Seja $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$.

(a) Verifique que as curvas $y = \tan(a)x$, com $a \in (-\pi/2, \pi/2)$, são curvas de nível da f.

(b) É possível definir a f na origem de tal modo que seja contínua? Justifique.

13 — Denotamos por

$$B_r(x_0,y_0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < r^2\}$$

o disco aberto de raio $r > 0$ centrado no ponto (x_0,y_0). Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = 1$, onde $D = B_1(0,0) \cup (1,0)$· Mostre, usando a definição de limite, que

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = 1\,.$$

Respostas dos Exercícios

1 (a) -8

(b) 1

(c) 0

(d) Não existe

(e) Não existe

(f) Não existe

(g) Não existe

(h) 0

(i) 0

(j) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$

(k) $\frac{2}{3}$

(l) 0

2 (a) Seja $f(x,y) = \frac{x^3y}{2x^6+y^2}$ Ao longo da curva $\gamma(t) = (t, mt)$, temos $(f\circ\gamma)(t) = \frac{mt^4}{2t^6+m^2t^2} = \frac{mt^2}{2t^4+m^2}$ para $t \neq 0$. Logo, quando t tende a zero, $(f\circ\gamma)(t)$ tende a zero. De moodo semelhante, ao longo da parábola $\lambda(t) = (t, kt^2)$, temos $(f\circ\lambda)(t) = \frac{kt^5}{2t^6+k^2t^4} = \frac{kt}{2t^2+k^2}$, que também tende a zero no mesmo limite.

(b) Ao longo da curva $\sigma(t) = (t, t^3)$, $\lim_{t\to 0}(f\circ\sigma)(t) = \lim_{t\to 0} \frac{t^6}{2t^6+t^6} = 1/3$ Como os limites ao longo das curvas γ e σ diferem, o limite da função f no ponto $(0,0)$ não existe.

3 (a) 0

(b) 0

(c) 0

(d) 0

4 (a) $\mathrm{Dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > -1\}$

(b) $\mathrm{Dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq y\}$

(c) $\mathrm{Dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 25\}$

(d) $\mathrm{Dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 > 4\}$

(e) $\mathrm{Dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq xy \leq 1\}$

(f) Contínua para todo $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x,y) \neq (0,0)\}$

5 (a) $a = 0$

(b) $a = 4$

(c) $a = -1$ ou $a = 5$

6 Não. Ao longo da curva $\gamma(t) = (0, t)$ o limite vale 1, ao passo que ao longo da curva $\gamma(t) = (t, 0)$ o limite vale $-4/3$.

7 Considere a função $u(x,y) = xy$, que tem limite no ponto $(0,0)$ e vale 0. Então

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1$$

8 Sim, basta definir a função como

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x+y)}{x+y} & se \ (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & se \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Pois assim

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

9 O limite da função não existe no ponto $(0,0)$. Para ver isto, considere as curvas $\gamma(t) = (t,t)$ e $\lambda(t) = (0,t)$. Logo, não é possível estendê-la continuamente para a origem.

10 O limite vale 0.

11 Basta verificar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$.

12 (a) Para $\gamma(t) = (t, \tan(a)t)$, temos $(f\circ\gamma)(t) = \frac{2\tan(a)}{(1+\tan^2(a))} = \sin(2a)$

(b) Não, pois essa função não possui limite no ponto $(0,0)$. (justifique!)