

# UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

## Lista 1 - Funções de Várias Variáveis

### Domínios, Gráficos e Curvas de Nível

**1** — Nos seguintes exercícios, (i) encontre o domínio, (ii) encontre a imagem, e (iii) descreva as curvas de nível da função:

(a)  $f(x, y) = x^2 - y^2$

(b)  $f(x, y) = \frac{y}{x^2}$

(c)  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$

(d)  $f(x, y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$

(e)  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

(f)  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$

**2** — Esboce o gráfico das funções a seguir (em seu domínio maximal):

(a)  $f(x, y) = 3$

(b)  $f(x, y) = y$

(c)  $f(x, y) = 1 - x - y$

(d)  $f(x, y) = \cos(x)$

(e)  $f(x, y) = 1 - x^2$

(f)  $f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$

(g)  $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$

(h)  $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - 16y^2}$

(i)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

**3** — Considere as funções:

(a)  $f(x, y) = x + y$ . Para quais valores de  $x$  e  $y$  tem-se  $f(x, y) = 2$ ? Represente graficamente a resposta.

(b)  $f(x, y) = 2^{x+y}$ . Para quais valores de  $x$  e  $y$  tem-se  $f(x, y) = 1$ ? Represente graficamente a resposta.

(c)  $f(x, y) = xy$ . Para quais valores de  $x$  e  $y$  tem-se  $f(x, y) = 1$ ? Represente graficamente a resposta.

**4** — Desenhe as curvas de nível  $C_k$  de  $f(x, y)$  para os valores de  $k$  dados:

(a)  $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ ;  $k = 0, 1, 2, 3$ .

(b)  $z = f(x, y) = y^2 - x^2$ ;  $k = 0, 1, 2, 3$ .

(c)  $z = f(x, y) = \frac{1}{2} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $k = 0, 1, 2, 3$ .

(d)  $z = f(x, y) = |x| + |y|$ ;  $k = 1, 2, 4$ .

**5** — Uma camada fina de metal, localizada no plano  $xy$ , tem temperatura  $T(x, y)$  no ponto  $(x, y)$ . As curvas de nível de  $T$  são chamadas de isotérmicas porque todos os pontos sobre uma isotérmica têm a mesma temperatura. Faça o esboço de algumas isotérmicas se a função de temperatura for dada por

$$T(x, y) = \frac{100}{1 + x^2 + 2y^2}.$$

**6** — Se  $V(x, y)$  é o potencial elétrico de um ponto  $(x, y)$  do plano  $xy$ , as curvas de nível de  $V$  são chamadas *curvas equipotenciais*, porque nelas todos os pontos têm o mesmo potencial elétrico. Esboce algumas curvas equipotenciais de

$$V(x, y) = \frac{c}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$$

onde  $c$  é uma constante positiva.

**7** — Dada a função  $z = f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ , pede-se:

(a) As equações das curvas de nível  $z = 1/4$ ,  $z = 4$  e  $z = 9$  de  $f(x, y)$ .

(b) A equação e o esboço da curva de nível de  $f(x, y)$  que contém o ponto  $(0, 2)$ .

(c) Um esboço do gráfico da função  $f$ .

**8** — Seja  $z = f(x, y) = \sqrt{10 - x - y^2}$ .

(a) Represente o domínio de  $f$  no plano  $xy$  e determine a imagem de  $f$ .

(b) Identifique as interseções do gráfico de  $f$  com os planos  $z = 0$ ,  $z = 1$ ,  $z = 2$ ,  $y = 0$  e  $x = 0$ .

(c) Faça um esboço do gráfico de  $f$ .

**9** — Associe a função (a) com seu gráfico (indicado por A-F na figura 1) e (b) com suas respectivas curvas de nível (indicado por I-VI na figura 2)<sup>1</sup>.

(a)  $z = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$

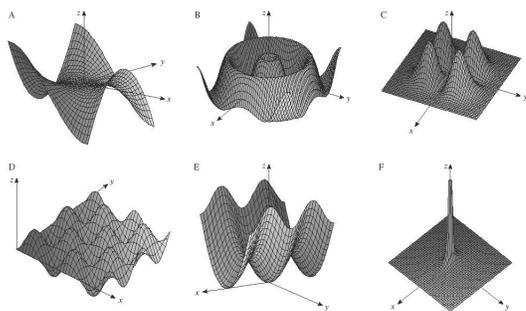
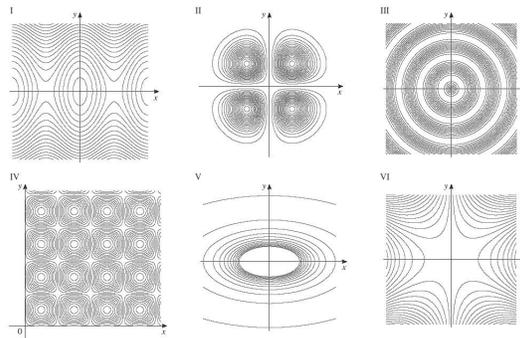
(b)  $z = x^2y^2e^{-x^2-y^2}$

(c)  $z = \frac{1}{x^2+4y^2}$

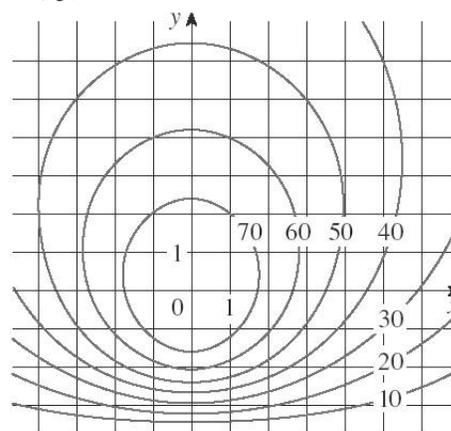
(d)  $z = x^3 - 3xy^2$

(e)  $z = \sin(x) \sin(y)$

(f)  $z = \sin^2(x) + \frac{1}{4}y^2$



**10** — Na Figura 3 são mostradas curvas de nível para a função  $f$ . Use-as para estimar o valor de  $f(-3, 3)$  e  $f(3, -2)$ . O que você pode dizer sobre o gráfico de  $f(x, y)$ ?



<sup>1</sup>Fonte das figuras: Cálculo, Stewart, 5a edição, vol 2, pág. 899, Cengage Learning

## Respostas dos Exercícios

1 (a)  $\text{Dom}f = \mathbb{R}^2$ ,  $\text{Im}f = \mathbb{R}$ , curvas de nível:  $x^2 - y^2 = k$

(b)  $\text{Dom}f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq 0\}$ ,  $\text{Im}f = \mathbb{R}$ , curvas de nível:  $y = kx^2$

(c)  $\text{Dom}f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 16\}$ ,  $\text{Im}f = [1/4, \infty)$ , curvas de nível:  $k^2 = \frac{1}{16 - x^2 - y^2}$ ,  $k \neq 0$

(d)  $\text{Dom}f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 9\}$ ,  $\text{Im}f = [0, 3]$ , curvas de nível:  $x^2 + y^2 = 9 - k^2$

(e)  $\text{Dom}f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 > 0\}$ ,  $\text{Im}f = \mathbb{R}$ , curvas de nível:  $x^2 + y^2 = e^k$

(f)  $\text{Dom}f = \mathbb{R}^2$ ,  $\text{Im}f = (0, 1]$ , curvas de nível:  $x^2 + y^2 = -\ln k$

2

3

4

5 Curvas de nível:

$$\frac{x^2}{(200 - 2k)/k} + \frac{y^2}{(100 - k)/k} = 1$$

6 Curvas de nível:  $x^2 + y^2 = r^2 - \frac{c^2}{k^2}$

7 (a)  $z = \frac{1}{4} : x^2 + y^2 = 4$  ;  $z = 4 : x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$  ;  
 $z = 9 : x^2 + y^2 = \frac{1}{9}$

(b)  $z = \frac{1}{4}$

8 (a)  $\text{Dom}f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq 10 - y^2\}$ ;  $\text{Im}f = [0, \infty)$

(b)  $z = 0 : x = 10 - y^2$ ;  $z = 1 : x = 9 - y^2$ ;  
 $z = 2 : x = 6 - y^2$ ,  $y = 0 : x = 10 - z^2$ ,  
 $x = 0 : z^2 + y^2 = 10$ .

9 (a) B(III)

(b) C(II)

(c) F(V)

(d) A(VI)

(e) D(IV)

(f) E(I)

10  $f(-3, 3) \approx 55$ ;  $f(3, -2) \approx 35$