Geometria Analítica

Lista 8 - Posições Relativas e Distância

Profa. Dahisy Lima

1. Os planos α e β são perpendiulares e se cortam na reta $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{-1} = z$. Uma equação de α é: $ax + y - 4z + d = 0$.

(a) Determine a e d.

(b) Dê uma equação para β.

2. Determine o ponto Q simétrio do ponto $P = (3, -4, -6)$ em relação ao plano determinado pelos pontos $A = (-6, 1-5)$, $B = (7, -2, -1)$ e $C = (10, -7, 1)$.

3. Verifique se a reta

$$r : \begin{cases} x = 1 - 3\alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = 1 - 2\alpha \end{cases}$$

está contida no plano determinado pelos pontos $(1, 0, -1)$, $(2, 1, 1)$ e $(0, 3, 1)$.

4. Seja r a reta determinada pelos pontos $A = (1, 2, 0)$ e $B = (-1, -k, 3)$ e γ o plano da equação $kx - y + 2z - m = 0$.

(a) Para que valores de k e m a reta r é paralela a γ?

(b) Para que valores de k e m a reta está ontida em γ?

5. (a) Estude a posição relativa da reta $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-1}{-3}$ e o plano $x + 2y + 2z + 6 = 0$.

(b) Determine o ponto de interseção ou a distânia entre eles.

6. Dê um ponto e um vetor diretor da reta r, interseção dos planos

$$\pi_1 : 2x + 2y - z + 4 = 0 \qquad e \qquad \pi_2 : x - 2y - 2z - 1 = 0.$$

A reta r tem um ponto de ordenada 3 ($y = 1$) ? Qual?

7. Dados o plano $\pi : x + y + z = 0$ e a reta

$$s : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-2},$$

escreva as equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto $P = (3, 1, -1)$, é paralela ao plano π e concorrente com a reta s. Quais são as coordenadas do ponto Q de concorrênia?

8. Duas faces de um cubo estão, respetivamente, nos planos $2x - 2y + z - 1 = 0$ e $2x - 2y + z + 5 = 0$. Determine o volume do cubo.

9. Calcule m, n $\in \mathbb{R}$ para que a reta $r : X = (n, 2, 0) + \lambda(2, m, m)$ esteja contida no plano $\pi : x - 3y + z = 1$.

10. Calcule m para que a reta $r : \dfrac{x-1}{m} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{m}$ seja transversal ao plano $\pi : x + my + z = 0$.

11. Considere o plano $\pi : X = (0, 0, 0) + \lambda(1, -1, -1) + \mu(3, 0, -1)$, o ponto $P = (2, 2, 1)$ e a reta $r : X = (1, 0, 0) + \gamma(2, 1, 0)$. Existe uma reta concorrente com r, passando por P e paralela a π? Por quê?

12. Dê uma equação vetorial da reta paralela ao plano π, perpendicular à reta AB e que intercepta a reta s, sendo $\pi : 2x - y + 3z - 1 = 0$, $A = (1, 0, 1)$, $B = (0, 1, 2)$, $s : X = (4, 5, 0) + \lambda(3, 6, 1)$.

13. Dados os planos $\pi_1 : x - y + z + 1 = 0$ e $\pi_2 : x + y - z - 1 = 0$, determine o plano que contém $\pi_1 \cap \pi_2$ e é ortogonal ao vetor (1, 1, -1).

14. Ache uma equação geral do plano por $(2, 1, 0)$ que é perpendicular aos planos $x + 2y - 3z + 4 = 0$ e $8x - 4y + 16z - 1 = 0$.

15. Dados os planos $\pi_1 : x - y + z + 1 = 0$, $\pi_2 : x + y - z - 1 = 0$ e $\pi_3 : x + y + 2z - 2 = 0$, ache uma equação do plano que contém $\pi_1 \cap \pi_2$ e é perpendicular a π_3.

Distância

1. Demonstre que dado um ponto P e um plano π com normal $\vec{n}$, a distância entre P e π é dada por:

$$d(P, \pi) = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP}|}{|\vec{n}|},$$

onde A é um ponto qualquer de π. Sugestão: considere o triângulo APP', onde P' é a projeção ortogonal de P em π.

2. Estude a posição relativa da reta $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-1}{-3}$ e o plano $x + 2y + 2z + 6 = 0$ e, dependendo, determine o ponto de intersecção ou a distância entre eles (a distância entre uma reta e um plano paralelos é dada pela distância entre qualquer ponto da reta e o plano).

3. Considere as equações de dois planos

$$\begin{cases} 2x + 2y - z + 4 = 0 \\ x - 2y - 2z - 1 = 0 \end{cases}.$$

Estude a posição relativa entre eles. Caso se interceptem, dê a equação da reta, caso sejam paralelos, dê a distância entre eles (a distância entre dois planos paralelos é dada pela distância entre qualquer ponto de um dos planos e o outro plano).

4. São dadas três retas r, s e t:

$$r : \left\{ \frac{x-7}{4} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-2}{3} \right. , \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 - 4m \\ y = 2m \\ z = -1 - 3m \end{array} \right. ,$$

e t é a reta que passa por $(1, -1, 0)$ e $(7, -6, 7)$.

a. Escreva as equações paramétricas das retas r e t.

b. Estude a posição relativa das retas r e s.

c. Estude a posição relativa das retas r e t.

5. Vamos deduzir uma expressão para a distância entre duas retas reversas r e s, que passam por pontos R e S respectivamente e possuem vetores diretores $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$.

a. Considere dois planos paralelos entre si, um que contém a reta r outro contém a reta s. Dê um vetor normal $\vec{n}$ a esses planos com os dados disponíveis no enunciado.

b. Qual a expressão para a distância entre esses dois planos em termos de $\vec{n}$ e dos pontos R e S?

c. Explique por que a distância entre r e s é igual à distância entre os planos e escreva a expressão final em termos de R, S, $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$.

d. Determine a distância entre as retas

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{5} = \frac{z+6}{13} \quad \text{e} \quad \frac{x-3}{9} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-6}{4} .$$

Respostas

1. $a = 5/3$, $d = -13/3$;
2. $(1, -2, 2)$
3. Sim
4. (a) $k = 8$ e $m \neq 6$ (b) $k = 8$ e $m = 6$
5. (a) paralelos (b) 1
6. $\vec{v} = (2, -1, 2)$. Ponto $(-9, 3, -8)$.
7. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad Q = (-1, 1, 3)$
8. $V = 8$
9. $m = 1$ e $n = 7$
10. Qualquer $m \neq 0$
13. $x + y - z - 1 = 0$
14. $x - 2y - z = 0$
15. $x + y - z - 1 = 0$

Exercícios Extras - Posições relativas entre retas e planos

1. Estude a posição relativa das retas r e s nos seguintes casos:

   (a) $r : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{2}$ $\qquad s : X = (0,0,0) + \lambda(1,2,0)$

   (b) $r : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z+2}{5}$ $\qquad s : x = -y = \dfrac{z-1}{4}$

   (c) $r : x+3 = \dfrac{2y-4}{4} = \dfrac{z-1}{3}$ $\qquad s : X = (0,2,2) + \lambda(1,1,-1)$

2. Determine m para que as retas $r : X = (1,0,2) + \lambda(2,1,3)$ e $s : X = (0,1,-1) + \lambda(1,m,2m)$ sejam coplanares e, nesse caso, estude sua posição relativa.

3. Estude a posição relativa da reta r e do plano π nos seguintes casos:

   (a) $r : X = (1,1,0) + \lambda(0,1,1)$ $\qquad \pi : x - y - z = 2$

   (b) $r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$ $\qquad \pi : X = (0, \frac{1}{2}, 0) + \lambda(1, -\frac{1}{2}, 0) + \mu(0,1,1)$

   (c) $r : \dfrac{x+2}{3} = y - 1 = \dfrac{z+3}{3}$ $\qquad \pi : 3x - 6y - z = 0$

4. Calcule m para que a reta $r : X = (1,1,1) + \lambda(2,m,1)$ seja paralela ao plano $\pi : X = (0,0,0) + \alpha(1,2,0) + \beta(1,0,1)$.

5. Calcule m, n $\in \mathbb{R}$ para que a reta $r : X = (n,2,0) + \lambda(2,m,m)$ esteja contida no plano $\pi : x - 3y + z = 1$.

6. Estude a posição relativa de π_1 e π_2 nos seguintes casos:

   (a) π_1: X = (1, 1, 1) + λ(0, 1, 1) + μ(-1, 2, 1)
   π_2: X = (1, 0, 0) + λ(1, -1, 0) + μ(-1, -1, -2)

   (b) π_1: 2x - y + 2z - 1 = 0
   π_2: 4x - 2y + 4z = 0

   (c) π_1: x - y + 2z - 2 = 0
   π_2: X = (0, 0, 1) + λ(1, 0, 3) + μ(-1, 1, 1)

7. Calcule m para que os planos $\pi_1 : X = (1,1,0) + \lambda(m,1,1) + \mu(1,1,m)$ e $\pi_2 : 2x + 3y + 2z + n = 0$ sejam paralelos distintos, nos casos:
   (a) $n = -5$ $\qquad$ (b) $n = 1$

8. Mostre que os planos
   π_1: X = (0, 0, 0) + λ(-1, m , 1) + μ(2, 0, 1)
   π_2: X = (1, 2, 3) + α(m, 1, 0) + β(1, 0, m)
   são transversais, para todo m $\in \mathbb{R}$.

9. Obtenha uma equação vetorial para a reta t, que passa por P e e concorrente com r e s, nos seguintes casos:

   (a) $P = (1,1,1)$, $r : x+3 = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{3}$, $s : X = (-2,0,4) + \lambda(1,1,-1)$

   (b) $P = (1,0,6)$, $r : \begin{cases} x-y-z+5=0 \\ 2x-z+4=0 \end{cases}$, $s : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z}{3}$

10. Obtenha uma equação vetorial para a reta t, contida no plano π: x - y + z = 0 e que é concorrente com as retas
    r: $\begin{cases} x+y+2z=2 \\ x=y \end{cases}$ e s: $\begin{cases} z=x+2 \\ y=0 \end{cases}$

11. Obtenha uma equação geral para o plano que contém a reta
    $r : X = (1,1,0) + \lambda(2,1,2)$ e é paralelo à reta $s : \dfrac{x+1}{2} = y = z+3$.

12. Obtenha uma equação geral para o plano que passa pelo ponto $P = (1,3,4)$ e é paralelo ao plano $\pi : x+y+z+1 = 0$.

13. Dê uma equação vetorial da reta h, paralela ao plano $\pi : x+y+z = 0$ e concorrente com as retas $r : X = (0,0,2) + \alpha(1,1,1)$, $s : X = (2,0,-5) + \beta(0,1,1)$ e $t : X = (-3,-3,3) + \gamma(1,0,2)$.

14. Existe alguma reta paralela à reta r: X= (0, 1, 1) + λ(1, -1, -1), contida no plano $\pi : x-2y+3z-1 = 0$? Por quê? E paralela ao eixo das abscissas?

15. Calcule o volume do tetraedro determinado pelas retas r, s e t e pelo plano π dados: $r : x = z = 0$, $s : x = y = 0$, $t : x-2y = z = 0$ e $\pi : x+y+z-5 = 0$.

16. Verifique se as retas r e s são ortogonais; em caso afirmativo, se são também perpendiculares.
    r: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z}{7}$ s: X = (1, 3, 0) + $\lambda(0,-7,5)$

17. Dê equações paramétricas da reta que passa por P e é perpendicular a r nos casos:

    (a) P = (2, 6, 1) r: $\begin{cases} x = -3+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$

    (b) P = (1, 0, 1) r passa por A = (0, 0, -1) e B = (1, 0, 0)

18. Ache equações sob a forma simétrica da reta perpendicular comum às retas reversas:
    r: $\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1+\lambda \end{cases}$ s: $\begin{cases} x+y=2 \\ z=0 \end{cases}$

19. Ache o simétrico de P em relação ao plano π nos casos seguintes:

(a) P = (1, 4, 2) π: x - y + z - 2 = 0

(b) P = (1, 1, 1) π: 4y - 2z + 3 = 0

20. Ache o simétrico de P em relação à reta r nos seguintes casos:

(a) P = (0, 2, 1) r: X = (1, 0, 0) + λ(0, 1, -1)

(b) P = (1, 1, -1) r: $\frac{x+2}{3}$ = y = z

(c) P = (0, 0, -1) r: $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + 3y - 1 = 0 \end{cases}$

21. Ache equações na forma simétrica da reta perpendicular às retas:

r: $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$ s: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \mu \\ z = 1 + \mu \end{cases}$

e que passa pela interseção de r e s.

22. Verifique se os planos dados são perpendiculares nos casos:

(a) X = (1, 1, 1) + λ(-1, 0, -1) + μ(4, 1, 1)
X = (3, 1, 1) + λ(1, -3, -1) + μ(3, 1, 0)

(b) x + y - z - 2 = 0
4x - 2y + 2z = 0