Geometria Analítica

Lista 7 - Equações do Plano

Profa. Dahisy Lima

1. Escreva as equações paramétricas e cartesiana para o plano determinado pelos pontos $A = (2, 2, -1)$, $B = (0, 4, -2)$ e $C = (-1, 3, 3)$.

2. Determine k de forma que o ponto $(3, 1, k)$ seja coplanar aos pontos $A = (1, 1, 2)$, $B = (3, 0, 2)$ e $C = (4, 1, 3)$.

3. Determine uma equação geral do plano que contém as retas

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{5} = \frac{z+6}{13} \quad \text{e} \quad \frac{x-4}{9} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-7}{4}.$$

4. Escreva uma equação do plano que passa por $A = (0, 2, -1)$ e $B = (1, 2, 3)$ e que é perpendicular ao plano $2x - y + z + 3 = 0$.

5. Escreva uma equação do plano determinado pelo ponto $(1, 2, 1)$ e pela reta

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = z.$$

6. Considere o plano $\pi :\ x + y + z - 1 = 0$.

a. Determine um vetor normal $\vec{n}$ ao plano.

b. Dê uma equação da reta r que passa pela origem e tem $\vec{n}$ como vetor diretor.

c. Determine o ponto de intersecção P entre r e π.

d. Determine a distância entre a origem e o ponto P.

7. Verifique se $\pi_1 = \pi_2$ nos seguintes casos:

(a) π_1: X = (1, 2, 1) + λ(1, -1, 2) + μ(-$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, -1)
π_2: X = (1, 2, 1) + α(-1, 1, -2) + β(-3, 4, -6)

(b) π_1: X = (2, 1, 3) + λ(1, 1, -1) + μ(1, 0, 1)
π_2: X = (0, 1, 1) + α(1, 3, -5) + β(1, -1, 3)

(c) π_1: x - 3y + 2z + 1 = 0, π_2: 2x - 6y + 4z + 1 = 0

(d) π_1: x - $\frac{y}{2}$ + 2z - 1 = 0, π_2: -2x + y - 4z + 2 = 0

8. Ache dois pontos A e B da intersecção dos planos π_1 e π_2 e escreva uma equação vetorial para a reta que passa por A e B. Dados:

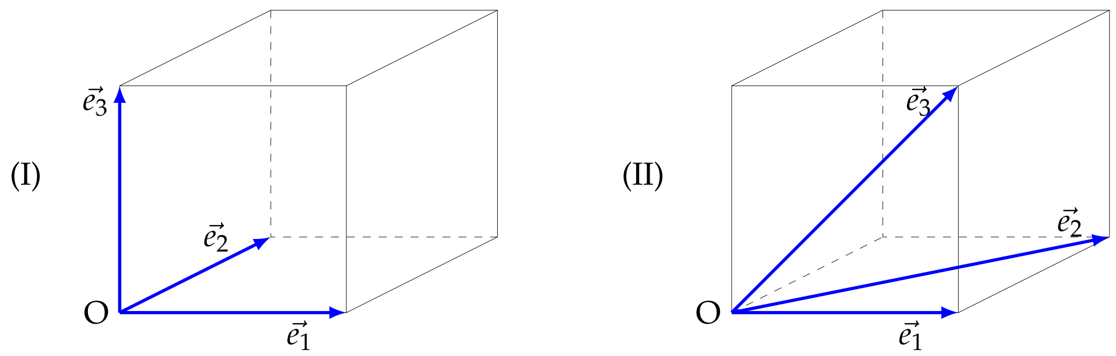
π_1: X = (1, 0, 0) + λ(0, 1, 1) + μ(1, 2, 1)

π_2: X = (0, 0, 0) + λ(0, 3, 0) + μ(-2, -1, -1)

9. Escreva equações paramétricas para os três planos coordenados.

10. Obtenha equações paramétricas do plano π que passa pelo ponto A = (1, 1, 2) e é paralelo ao plano π_1: X = (1, 0, 0) + λ(1, 2, -1) + μ(2, 1, 0).

11. Faça um esboço dos planos com equações gerais dadas abaixo, relativamente aos sistemas de coordenadas ilustrados nas figuras.



(a) x - 2 = 0

(b) x - z = 0

(c) y - z - 2 = 0

12. Obtenha equações gerais para os planos π descritos abaixo:

(a) π passa por A = (1, 0, 1) e B = (0, 1, -1) e é paralelo ao segmento CD, onde C = (1, 2, 1) e D = (0, 1, 0).

(b) π passa pelos pontos A = (1, 0, 1), B = (2, 1, -1) e C = (1, -1, 0)

13. Dadas as retas

$r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{2} = z \qquad e \qquad s: x - 1 = y = z$

obtenha uma equação geral para o plano determinado por r e s.

14. Obtenha uma equação geral do plano π dado por:

$$\pi: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 - \lambda + \mu \end{cases}$$

15. Seja π_1 o plano que passa pelos pontos A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0) e C = (0, 0, 1). Seja π_2 o plano que passa por Q = (-1, -1, 0) e é paralelo aos vetores $\overrightarrow{v}$ = (0, 1, -1) e $\overrightarrow{w}$ = (1, 0, 1). Seja π_3 o plano de equação vetorial X = (1, 1, 1) + λ(-2, 1, 0) + μ(1, 0, 1).

(a) Escreva equações geral de π_1, π_2 e π_3.

(b) Mostre que a intersecção $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ se reduz a um único ponto; determine-o.

16. Verifique se a reta r está contida no plano π, dados:

π: X = (1, 4, 1) + λ(1, -1, 1) + μ(-1, 2, -1) e r passa pelos pontos A = (2, 3, 2) e B = (0, 0, 1)

17. Sejam P = (4, 1, -1) e r: X = (2, 4, 1) + λ(1, -1, 2)

(a) Mostre que P $\notin$ r.

(b) Obtenha uma equação geral do plano determinado por r e P.

18. Verifique se as retas r e s são concorrentes. Em caso afirmativo, determine o ponto P comum a elas e escreva uma equação geral do plano determinado por elas.

r: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + 4\lambda \end{cases}$ $\qquad$ $s : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{2+z}{5}$

Considere fixado um sistema *ortogonal* de coordenadas.

19. Obtenha um vetor normal ao plano π os seguintes casos:

(a) π passa pelos pontos A = (1, 1, 1), B = (1, 0, 1) e C = (1, 2, 3)

(b) π tem equações paramétricas $\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 2 - \alpha + \beta \\ z = \alpha - 2\beta \end{cases}$

(c) π tem equação geral x - 2y + 4z + 1 = 0

20. Dê uma equação geral do plano π que passa pela origem e é perpendicular à reta que passa por $A = (1, 1, 1)$ e $B = (2, 1, -1)$.

21. Escreva equações paramétricas da reta que passa pela origem e é perpendicular ao plano

π: $\begin{cases} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = \lambda + \mu \\ z = \lambda \end{cases}$

Respostas

1. $9x + 11y + 4z - 36 = 0$

2. $k = 8/3$

3. $3x - 7y + 2z - 5 = 0$

4. $4x + 7y - z - 15 = 0$

5. $x + y - z - 2 = 0$

7. (a) sim (b)sim

8. $X = (4, 5, 2) + \lambda(2, 3, 1)$

10. $\begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = 1 = 2\lambda + \mu \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$

11. (a) $\begin{cases} x = 2 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -2 + \mu \end{cases}$

12. (a) $3x - y - 2z - 1 = 0$ (b) $3x - y + z - 4 = 0$

13. $x - y - 1 = 0$

14. $y - 2 = 0$

15. (b) $(1/2, 2/3, -1/6)$

18. $P = (-2, 2 - 7)$, $\pi : -17x + 7y + 6z - 6 = 0$

19. (a) (1,0,0) (b) (1,2,2) (c) (1,-2,4)

20. $x - 2z = 0$

21. $x = \lambda, y = \lambda, z = 0$