Geometria Analítica

Lista 6 - Equações da Reta

Profa. Dahisy Lima

Retas no espaço

1. São dados os pontos $A = (3, 6, -7)$, $B = (-5, 2, 3)$ e $C = (4, -7, -6)$ em relação a um sistema de coordenadas qualquer.

(a) Determine P sobre a reta que passa por A e B tal que o comprimento de PB seja o triplo do comprimento de PA.

(b) Escreva equações paramétricas para a reta determinada pelos pontos B e C, e obtenha sua forma simétrica (se existir). O ponto $D = (3, 1, 4)$ pertence a essa reta?

(c) Verifique que os pontos A, B e C são vértices de um triângulo.

(d) Escreva equações paramétricas da mediana relativa ao vértice C do triângulo.

2. Escreva equações paramétricas para a reta r, que passa pelo ponto $A = (2, 0, -3)$, nos três seguintes casos:

(a) r é paralela à reta $s : \dfrac{1-x}{5} = \dfrac{3y}{4} = \dfrac{z+3}{6}$

(b) r é paralela à reta que passa pelos pontos $B = (1, 0, 4)$ e $C = (2, 1, 3)$.

(c) r é paralela à reta s': $\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = -1 + -\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

3. Estude a posição relativa das retas r e s nos casos abaixo:

(a) $r : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} (\lambda \in \mathbb{R}) \qquad s : \begin{cases} x = 1 - \frac{1}{2}\mu \\ y = 2 + \mu \\ z = 1 + \frac{1}{2}\mu \end{cases} (\mu \in \mathbb{R})$

(b) $r : \begin{cases} x = \frac{1}{3} - \lambda \\ y = -\frac{1}{3} + \lambda \\ z = \frac{2}{3} - \lambda \end{cases} (\lambda \in \mathbb{R}) \qquad s : \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = -1 + \mu \\ z = 2 - \mu \end{cases} (\mu \in \mathbb{R})$

(c) $r : X = (1, 1, 0) + \lambda(1, 0, -1/2) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$
$s : X = (0, 1, 1/2) + \mu(-2, 0, 1) \quad (\mu \in \mathbb{R})$

4. Dados $A = (0, 2, 1)$, $r : X = (0, 2, -2) + \lambda(1, -1, 2)$, em relação a um sistema cartesiano, ache os pontos de r que distam $\sqrt{3}$ de A. Em seguida, diga se a distância do ponto A à reta r é maior, menor ou igual a $\sqrt{3}$, e por quê.

5. Sejam $P = (1, 0, 1)$ e $Q = (0, 1, 1)$ em relação a um sistema cartesiano de coordenadas. Em cada um dos casos a seguir ache um ponto C da reta PQ tal que a área do triângulo ABC seja $\frac{1}{2}$.

   (a) $A = (1, 2, 1)$ $\quad B = (1, 2, 3)$;
   (b) $A = (1, 3, 2)$ $\quad B = (2, 2, 2)$;
   (c) $A = (3, 0, 2)$ $\quad B = (2, 1, 2)$;
   (d) $A = (3, -2, 1)$ $\quad B = (0, 0, 1)$.

6. Calcule a distância do ponto P à reta r e determine a sua projeção ortogonal P' nos casos

   (a) $P = (0, -1, 0)$ $\quad r: \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = z + 1 \end{cases}$

   (b) $P = (1, -1, 4)$ $\quad r: \begin{cases} \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y}{-3} = x - 1{-}2 \end{cases}$

   (c) $P = (-2, 0, 1)$ $\quad r: \begin{cases} x = 3\lambda + 1 \\ y = 2\lambda - 2 \\ z = \lambda \end{cases}$

   (d) $P = (2, -1, 3)$ $\quad r: \begin{cases} \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+7}{5} = \dfrac{z-2}{2} \end{cases}$

7. Escreva equações das retas que contêm as diagonais do paralelogramo de vértices $A = (1, -2, 2)$, $B = (2, 1, -1)$, $C = (1, -6, 8)$ e $D = (2, -3, 5)$.

8. Determine equações paramétricas da reta que passa por $(-2, 0, 1)$, cujo vetor diretor é ortogonal a $(1, -2, 1)$ e que seja concorrente com

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-3}{3}.$$

9. São dadas as retas $\quad r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases} \quad$ e $\quad s: \begin{cases} x = 3 - \alpha \\ y = 4 - \alpha \\ z = -1 + 2\alpha \end{cases}$

   (a) Mostre que r e s encontram-se num ponto P.
   (b) Dê equações da reta t, que passa por P e é perpendicular a r e a s.

10. Ache a equação da reta r que passa pelo ponto $B = (3, 1, 2)$ e é concorrente com as retas $\quad s: \begin{cases} x + 1 = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-5}{-2} \end{cases} \quad$ e $\quad t: \begin{cases} x - 4 = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-4}{-1} \end{cases}$.

11. Escreva as equações da reta de vetor diretor $(1, 1, 0)$ e concorrente com as retas $x = 2y = 3z$ e $(x, y, z) = (4, 1 - \lambda, \lambda)$.

Retas no plano

1. Mostre que:

(a) A equação de toda reta no plano pode ser escrita na forma: $ax + by + c = 0$, com a, b, c constantes reais. Tal forma é conhecida como forma canônica ou equação cartesiana da reta no plano.

(b) A equação na forma canônica é única a menos de uma constante multiplicativa.

2. Determine as equações paramétricas e na forma canônica das retas que passam pelos pontos A e B.

(a) $A = (3, 5)$ e $B = (-2, 3)$

(b) $A = (0, 1)$ e $B = (1, 0)$

3. Os pontos $A = (2, 5)$ e $B = (14, 1)$ são simétricos em relação a uma reta. Determine equações canônica e paramétrica dessa reta.

4. Os lados de um triângulo estão sobre as retas $y = 2x + 1$, $y = 3x - 2$ e $y = 1 - x$. Ache os vértices desse triângulo.

5. Ache uma equação da reta e desenhe uma figura para cada caso abaixo:

(a) reta que passa por $(-5, 7)$ perpendicular a $4x - 5y = 10$.

(b) Duas retas por $(-2, 3)$, uma paralela e outra perpendicular a $3x + 2y + 5 = 0$.

(c) A reta que passa por $(a, 0)$ perpendicular a $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

6. Determine a e b de modo que as equações $x = at + 1$ e $y = bt + 5$ sejam uma representação paramétrica da reta $y = 2x + 3$.

Respostas

1. (c) Mostre que $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ são LI, ou então que C não pertencen à reta AB.

(d) $\begin{cases} x = 4 + 5\lambda \\ y = -7 - 11\lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = -6 - 4\lambda \end{cases}$

3. (a) $r = s$ (b) $r \neq s$ (c) $r = s$

4. $(1, 1, 0)$ $d(A, r) = \sqrt{3}$.

5. Não existe C para os casos a, b,c.

(d) Tome C igual a $(2, -1, 1)$ ou $(4, -3, 1)$.

7. $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2 - \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = 2 + 3\lambda \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 - m \\ y = 1 - 7m \quad (m \in \mathbb{R}) \\ z = -1 + 9m \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = -2 + 16\lambda \\ y = 9\lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$

9. (a) $P = (2, 3, 1)$

(b) $\begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 3 - \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = -5 + \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = 6 \end{cases}$