

Geometria Analítica

Lista 3 - Produto Escalar

Profa. Dahisy Lima

Considere, salvo menção em contrário, as coordenadas dos vetores em relação a uma base ortonormal

- Verdadeiro ou falso?
 - () A medida angular entre um vetor não nulo e ele mesmo é zero.
 - () A medida angular entre dois vetores paralelos é 90° .
 - () A medida angular entre dois vetores de sentidos opostos é π radianos.
 - () Não existem \vec{u} e \vec{v} tais que $\text{ang}(\vec{u}, \vec{v}) = 4\pi/3$ radianos.
- Calcule o cosseno do ângulo formado entre os vetores $(1, 4, -1)$ e $(0, 2, 3)$.
- Ache x de modo que $\vec{u} \perp \vec{v}$ nos casos:
 - $\vec{u} = (x, x, 4)$ $\vec{v} = (4, x, 1)$
 - $\vec{u} = (x + 1, 1, 2)$ $\vec{v} = (x - 1, -1, -2)$
- Ache \vec{u} de norma $\sqrt{5}$, ortogonal a $(2, 1, -1)$ tal que $\{\vec{u}, (1, 1, 1), (0, 1, -1)\}$ seja LD.
- São dados $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.
 - Se $\vec{w} = \vec{u} + \lambda\vec{v}$, determina λ para que \vec{u} e \vec{w} sejam ortogonais.
 - Determine o cosseno do ângulo que \vec{u} forma com \vec{v} .
- Ache um vetor unitário (norma 1), ortogonal a $\vec{u} = (1, -3, 1)$ e a $\vec{v} = (-3, 3, 3)$. Quantas soluções tem esse problema? Interprete geometricamente.
- Sejam $\vec{OA} = (1, -1, 1)$, $\vec{OB} = (2, 1, 0)$ e $\vec{OC} = (-2, 3, 1)$.
 - Calcule o comprimento dos lados do triângulo ABC.
 - Calcule o cosseno do maior ângulo do triângulo ABC.
- Ache a projeção ortogonal de $\vec{v} = (1, -2, 3)$ na direção de um eixo que forma ângulos iguais com os vetores da base ortonormal $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
- Dados $\vec{AB} = \vec{i} + \vec{k}$ e $\vec{CB} = \vec{j} + 2\vec{k}$,

- a. mostre que o triângulo ABC é retângulo;
- b. determine a projeção de \vec{AB} sobre \vec{BC} ;
- c. ache o comprimento da altura relativa à hipotenusa.
10. Ache a projeção ortogonal de $\vec{v} = (1, -2, 3)$ na direção de um eixo que forma ângulos iguais com os vetores da base ortonormal $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
11. Os vetores \vec{a} e \vec{b} formam um ângulo de 60° , $|\vec{a}| = 1$ e $|\vec{b}| = 2$. Sabe-se que $\vec{u} = \vec{a} + 3\vec{b}$ e $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b}$. Pedem-se: $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ e o ângulo formado por \vec{u} e \vec{v} . Desenhe os vetores \vec{a} , \vec{b} , \vec{u} e \vec{v} .
12. Determine os ângulos formados pelos vetores não nulos \vec{u} e \vec{v} , sabendo que $|\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{u} + \vec{v}|$.
13. Um losango é um paralelogramo com os quatro lados de comprimentos iguais. Prove que as diagonais de um losango são perpendiculares.
14. Supondo \vec{a} e \vec{b} não nulos, demonstre *algebricamente*:
- a. $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ (desigualdade de Schwarz)
- b. $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ (propriedade triangular).
- c. $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ se, e somente se \vec{a} e \vec{b} são paralelos e de mesmo sentido.
- d. $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ se, e somente se $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
15. Prove que $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}|$ se, e somente se \vec{a} e \vec{b} são LD.
16. Encontre a projeção ortogonal do vetor \vec{w} na direção do vetor \vec{v} nos seguintes casos:
- (a) $\vec{w} = (1, -1, 2)$, $\vec{v} = (3, -1, 1)$;
- (b) $\vec{w} = (-1, 1, 1)$, $\vec{v} = (-2, 1, 2)$;
- (c) $\vec{w} = (1, 3, 5)$, $\vec{v} = (-3, 1, 0)$.
17. Decomponha $\vec{w} = (1, 0, 3)$ como soma de dois vetores \vec{w}_1 e \vec{w}_2 , tais que $\{\vec{w}_1, (1, 1, 1), (-1, 1, 2)\}$ seja linearmente dependente e \vec{w}_2 seja ortogonal a estes dois últimos vetores.
18. Sejam dois vetores quaisquer \vec{u} , \vec{v} e seja $\vec{w} = \vec{v} - \text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$. Mostre que \vec{u} e \vec{w} são ortogonais.