Geometria Analítica

Lista 4 - Produto Vetorial e Misto

Profa. Dahisy Lima

Considere, salvo menção em contrário, as coordenadas dos vetores em relação a uma base ortonormal positiva $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

1. Dados $\vec{u} = (1, 2, -1)$ e $\vec{v} = (1, 3, -2)$, determine um vetor $\vec{a}$, ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, de módulo 3, que forma com $\vec{k}$ um ângulo obtuso.

2. São dados $\vec{u} = (1, 1, 0)$, $\vec{v} = (-1, 2, 1)$ e $\vec{w} = (2, 0, -1)$.

a. Calcule $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ e $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

b. O produto vetorial é uma operação associativa? Justifique.

3. São dados: $|\vec{x}| = 3$, $|\vec{y}| = 4$, $\vec{x} \perp \vec{y}$, $\overrightarrow{AB} = 3\vec{x} - 4\vec{y}$ e $\overrightarrow{AC} = \vec{x} + 5\vec{y}$. Calcule a área do triângulo ABC e a distância de B à reta AC.

4. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ uma base ortonormal positiva.

a. Determine $\vec{u}$, sabendo que $\vec{u}$ é paralelo ao vetor $(2, -1, 2)$.

b. Determine $\vec{v}$, sabendo que $\vec{v}$ é da forma $(x, y, 0)$.

c. Determine $\vec{w}$.

5. Dados os vetores $\vec{u} = (2, 2, 4)$ e $\vec{v} = (1, 1, 0)$, determine uma base ortonormal positiva tal que seu primeiro vetor seja paralelo a $\vec{u}$ e seu segundo vetor seja uma combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Determine, na base encontrada, as coordenadas de $\vec{x} = (1, 0, 0)$.

6. Verdadeiro ou falso? Se verdadeiro, demonstre, se falso, dê um contra-exemplo:

a. ( ) Se $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, então $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{b} \wedge \vec{c} = \vec{c} \wedge \vec{a}$.

b. ( ) Se $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{b} \wedge \vec{a}$, então $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são paralelos.

c. ( ) Se $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{c}$ então $\vec{b} = \vec{c}$.

7. Sejam $\overrightarrow{OA}$ = (0 , 3, 2), $\overrightarrow{OB}$ = (1 , 5, 1) e $\overrightarrow{OC}$ = (1 , 2, -1).

a. Demonstre que o quadrilátero de vértices O, A, B e C é um paralelogramo.

b. Calcule a sua área.

c. Calcule a distância de A à reta OC.

8. Sejam $\overrightarrow{AB} = (1, -1, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 3, 2)$ e $\overrightarrow{AD} = (2, 1, 0)$. Pede-se:

a. a área do triângulo ABC e sua altura relativa ao vértice A;

b. o volume do paralelepípedo $ABCD$ e a distância do ponto D ao plano determinado por A, B e C.

9. Demonstre as seguintes identidades vetoriais (use as anteriores para provar as seguintes):

a. $\vec{\mathbf{a}} \wedge (\vec{\mathbf{b}} \wedge \vec{\mathbf{c}}) = (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{c}})\, \vec{\mathbf{b}} - (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}})\, \vec{\mathbf{c}}$,

b. $(\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}}) \wedge \vec{\mathbf{c}} = (\vec{\mathbf{c}} \cdot \vec{\mathbf{a}})\, \vec{\mathbf{b}} - (\vec{\mathbf{c}} \cdot \vec{\mathbf{b}})\, \vec{\mathbf{a}}$,

c. $(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) \cdot (\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{c}}) \wedge (\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) = 0$,

d. $\vec{\mathbf{a}} \wedge [\vec{\mathbf{a}} \wedge (\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}})] = (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}})(\vec{\mathbf{b}} \wedge \vec{\mathbf{a}})$,

e. $(\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}}) \wedge (\vec{\mathbf{c}} \wedge \vec{\mathbf{d}}) = (\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{d}})\, \vec{\mathbf{c}} - (\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{c}})\, \vec{\mathbf{d}}$,

f. $(\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}}) \cdot (\vec{\mathbf{c}} \wedge \vec{\mathbf{d}}) = (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{c}})(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{d}}) - (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{d}})(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{c}})$,

g. $(\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}}) \wedge (\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{c}}) = (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} \wedge \vec{\mathbf{c}})\, \vec{\mathbf{a}}$,

h. $\vec{\mathbf{a}} \wedge (\vec{\mathbf{b}} \wedge \vec{\mathbf{c}}) + \vec{\mathbf{b}} \wedge (\vec{\mathbf{c}} \wedge \vec{\mathbf{a}}) + \vec{\mathbf{c}} \wedge (\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}}) = \vec{\mathbf{0}}$. (*identidade de Jacobi*)

10. Calcule $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$, sabendo que $\|\overrightarrow{u}\| = 1$, $\|\overrightarrow{v}\| = 2$, $\|\overrightarrow{w}\| = 3$, e que $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ é uma base negativa, sendo $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ dois a dois ortogonais.

11. A medida em radianos do ângulo entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é $\frac{\pi}{6}$, e $\overrightarrow{w}$ é ortogonal a $\overrightarrow{u}$ e a $\overrightarrow{v}$. Sendo $\|\overrightarrow{u}\| = 1$, $\|\overrightarrow{v}\| = 1$, $\|\overrightarrow{w}\| = 4$ e $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ base positiva, ache $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$.

12. Prove que:

a. $[\vec{u} + \vec{v}, \vec{v} + \vec{w}, \vec{u} + \vec{w}] = 2[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$

b. $[\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$

13. Prove que:

a. $|[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]| \leq \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \, \|\overrightarrow{w}\|$

b. A igualdade ocorrerá se e somente se algum dos vetores for nulo, ou, sendo todos não-nulos, forem dois a dois ortogonais.

14. Prove que a altura do tetraedro ABCD relativa à base ABC é

$$\frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||}$$