Geometria Analítica

Lista 2 - Dependência Linear e Bases

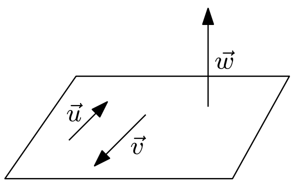
Profa. Dahisy Lima

1. Se possível, desenhe. Se impossível, explique o porquê.

a. $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ LD , $\{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ LI e $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ LD.
b. $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ LD , $\{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ LI e $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ LI.
c. $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ LD , $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\}$ LD e $\{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ LI.
d. $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ LI , $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\}$ LI e $\{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ LD.

2. Responda verdadeiro ou falso e explique.

a. ( ) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ implica que A, B e C são colineares.
b. ( ) Se os quatro pontos A, B, C e D são não coplanares, então os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ também são não coplanares.
c. ( ) Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, na figura abaixo, são coplanares. (Aqui $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos.)



3. Prove que:

a. se $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ é LD, então $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ é LD para qualquer $\overrightarrow{w} \in V^3$.
b. se $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ é LI, então $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ é LI.
c. $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ é LD $\Longleftrightarrow$ $\{\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\}$ é LD.
d. $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ é LI $\Longleftrightarrow$ $\{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\}$ é LI.

4. Prove que se $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ é LI, então $\{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}, 3\overrightarrow{v}\}$ também é LI, o mesmo sucedendo com $\{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\}$.

5. Sendo $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = \vec{0}$, prove que $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$ é LD para qualquer ponto O.

6. Sejam $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$ três vetores quaisquer no espaço, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{c}$. Prove que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são LD.

7. Seja $B = \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ uma base de V^2. Definimos

$$\overrightarrow{u}_\theta = \sin\theta\,\overrightarrow{u} + \cos\theta\,\overrightarrow{v}\,,$$
$$\overrightarrow{v}_\theta = \cos\theta\,\overrightarrow{u} - \sin\theta\,\overrightarrow{v}\,.$$

Mostre que para todo $\theta \in \mathbb{R}$, $B_\theta = \{\overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{v}_\theta\}$ também é uma base de V^2.

8. Se $E = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ é uma base, prove que $F = \{\alpha\overrightarrow{e_1}, \beta\overrightarrow{e_2}, \gamma\overrightarrow{e_3}\}$ é uma base, desde que α, β, γ não sejam nulos.

9. Dados os vetores $\overrightarrow{a} = (5, -1, 0)$, $\overrightarrow{b} = (2, 0, 1)$ e $\overrightarrow{c} = (0, 1, 3)$, escreva o vetor $\overrightarrow{x} = (2, -1, -1)$ como combinação linear de $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$.

10. É possível escrever (0, 0, 1) como combinação linear de (1, 2, 1), (1, 0, 1) e (1, 1, 1)? Se quatro vetores de V^3 são sempre LD, como interpretar a resposta anterior?

11. Verifique se são LD ou LI os vetores:

a. $\vec{u} = (3, 10, 11)_B$, $\vec{v} = (4, 7, -1)_B$

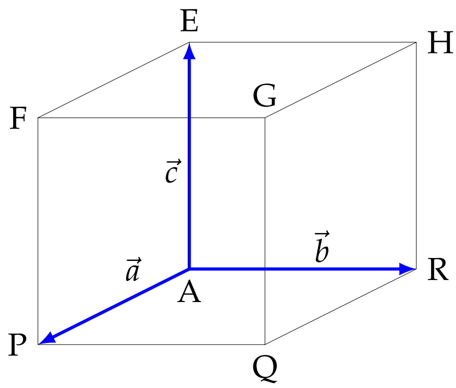
b. $\vec{u} = (1, 7, 1)_B$, $\vec{v} = (1/2, 7/2, 1/2)_B$

c. $\vec{u} = (1, -1, 2)_B$, $\vec{v} = (0, 1, 3)_B$, $\vec{w} = (4, -3, 11)_B$

12. Os vetores $\vec{u} = (a, -1, b+1)$ e $\vec{v} = (4, a-5, b-1)$ são paralelos. Determine as coordenadas de $\vec{u} + \vec{v}$.

13. Sejam $\vec{u} = (m, -1, m^2+1)$, $\vec{v} = (m^2+1, m, 0)$ e $\vec{w} = (m, 1, 1)$. Mostre que $C = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base de V^3, independentemente do valor de m.

14. A figura abaixo é um cubo e $B = \{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$ é uma base.



a. Demonstre, algebricamente, que $C = \{\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AH}\}$ é uma base.

b. Determine, na base B, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{x} = (1, 2, -2)_C$.

c. Se $\overrightarrow{y} = 3\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$, quais as coordenadas de $\overrightarrow{y}$ na base C?

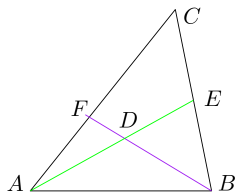
15. Seja $E = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ uma base. Sejam $\overrightarrow{f}_1 = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$ e $\overrightarrow{f_3} = -2\overrightarrow{e_3}$.

a. Mostre que $F = \{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}\}$ também é uma base.

b. Resolva $(x, y, z)_E = (3, -2, 4)_F$.

c. Determine na base F as coordenadas de $\overrightarrow{v} = (1, 2, -1)_E$.

16. Seja D o ponto médio da mediana AE do triângulo ΔABC. Se a reta BD corta o lado AC no ponto F, determine a razão que F divide AC.



Respostas

1. Apenas a letra b é impossível.

2. a(F), b(F), c(V)

9. $\vec{x} = 2\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$

10. a. Não

11. a. (LI) b. (LD) c. (LD)

12. $(5, -5, -\frac{10}{3})$

14. $\vec{x} = (3, -1, 1)_B$; $\vec{y} = (2, 1, -3)_C$

15. $(x, y, z)_E = (3, -5, -7)_E$; $(1, 2, -1)_E = (1, 3, \frac{5}{2})_F$

16. F divide o segmento AC na razão 1 : 2.