Geometria Analítica

Lista 1 - Vetores

Profa. Dahisy Lima

1. Verifique se é verdadeira (V) ou falsa (F) cada afirmação e justifique sua resposta:

a. ( ) $\overline{AB} \sim \overline{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

b. ( ) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow A = C$ e $B = D$.

c. ( ) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$.

d. ( ) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow AC \cap BD = \varnothing$.

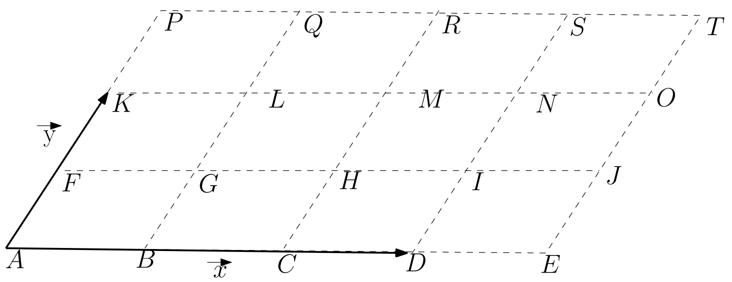
e. ( ) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

f. ( ) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.

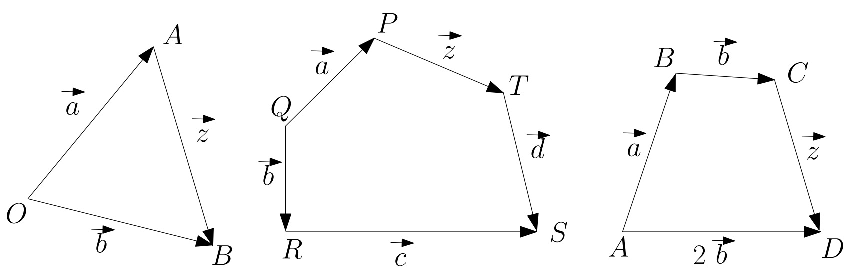
g. ( ) Se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, então existe um único plano contendo A, B, C e D.

h. ( ) $\overline{AB} \sim \overline{CD} \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.

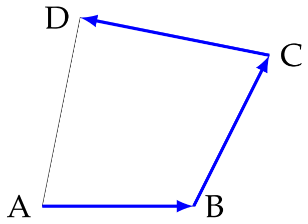
2. Na figura abaixo, todos os paralelogramos menores são congruentes. Sendo $\overrightarrow{AD} = \vec{x}$ e $\overrightarrow{AK} = \vec{y}$, escreva os vetores $\overrightarrow{GJ}$, $\overrightarrow{RQ}$, $\overrightarrow{SI}$, $\overrightarrow{HC}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{KD}$, $\overrightarrow{PH}$, $\overrightarrow{AT}$ e $\overrightarrow{OC}$ em função de $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

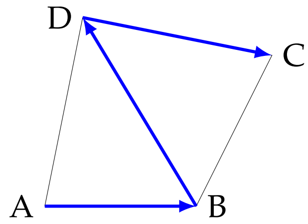


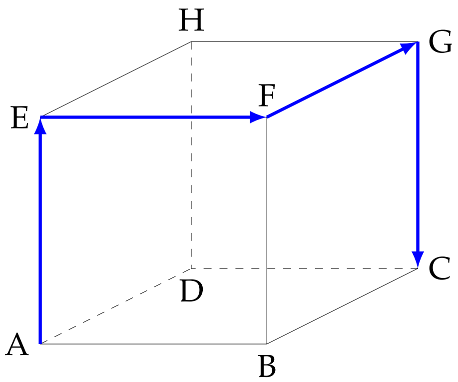
3. Em cada uma das figuras abaixo, escreva o vetor $\vec{z}$ em função dos demais.



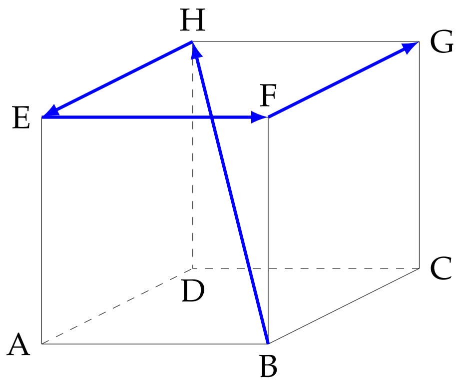
4. Ache a soma dos vetores indicados em cada uma das figuras abaixo:



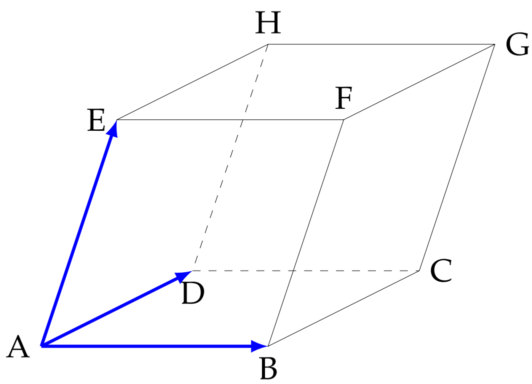




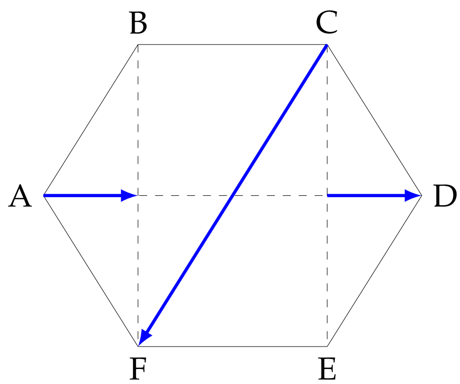
Cubo



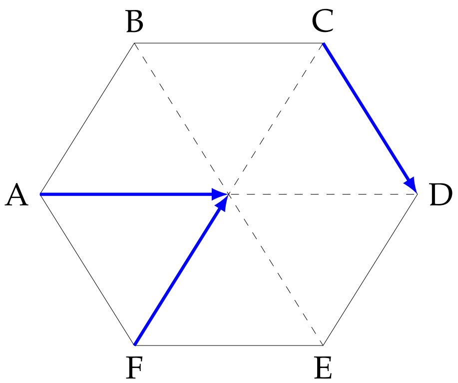
Cubo



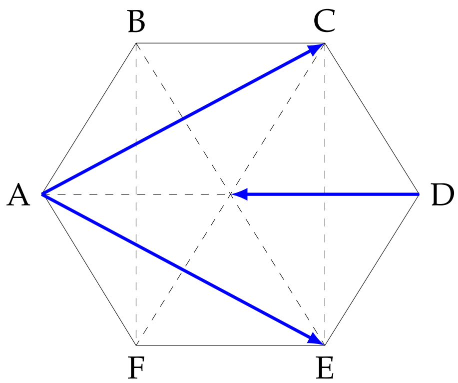
Paralelepípedo



Hexágono regular



Hexágono regular



Hexágono regular

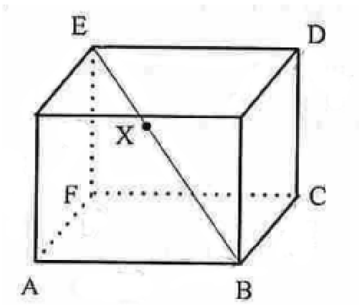
5. Sendo $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ dois vetores não paralelos, escreva $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ em função de $\vec{a}$ e $\vec{b}$, sabendo que $\overrightarrow{AP} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

6. Considere um quadrilátero $ABCD$, onde $\overrightarrow{AD} = 3\vec{v}$, $\overrightarrow{BC} = 2\vec{v}$ e $\overrightarrow{AB} = \vec{w}$. Que tipo de quadrilátero é $ABCD$? Determine o lado $\overrightarrow{CD}$ e as diagonais $\overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{CA}$ em função de $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

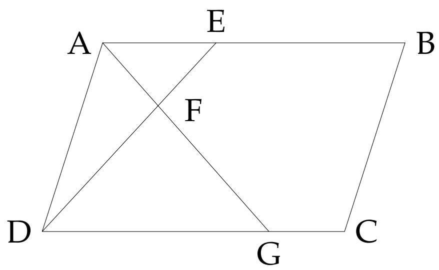
7. Considere um trapézio $ABCD$, onde $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DC} = 2\vec{a}$ e $\overrightarrow{DA} = \vec{b}$. O ponto E é tal que $\overrightarrow{BE}= \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Escreva $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{DE}$ em função de $\vec{a}$ e de $\vec{b}$.

8. Calcule a soma de seis vetores que têm por representantes segmentos orientados com origem em cada um dos vértices, e extremidade no centro de um mesmo hexágono regular.

9. Dados $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ e $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$, seja X o ponto ilustrado na figura abaixo. Escreva os vetores $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{FX}$ em função de $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, sabendo que $\overrightarrow{EX} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{EB}$.



10. Seja $ABCD$ um paralelogramo como na figura abaixo. Os pontos E e G são tais que $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$. F é o ponto de encontro de $\overline{AG}$ e $\overline{DE}$. Escreva $\overrightarrow{AF}$ em função de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$.



11. No trapézio $ABCD$ com $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$, $\overrightarrow{AD} = 2\vec{v}$, seja E o ponto de intersecção das diagonais AC e BD. Sendo $\overrightarrow{BE} = \lambda\overrightarrow{BD}$, determine λ.

12. Num triângulo ABC temos $3\overrightarrow{BP} = 4\overrightarrow{PC}$ e $3\overrightarrow{PQ} = 4\overrightarrow{QA}$.

    (a) Localize na figura os pontos P e Q, justifique sua resposta.

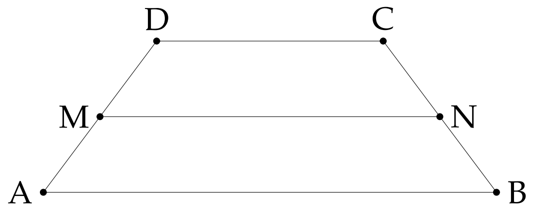
(b) Expresse $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{BQ}$ em função de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

13. Seja $ABCD$ um paralelogramo de diagonais AC e BD. O ponto R é tal que $3\overrightarrow{DR} = 2\overrightarrow{CD}$ e S é tal que $2\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{SC}$.

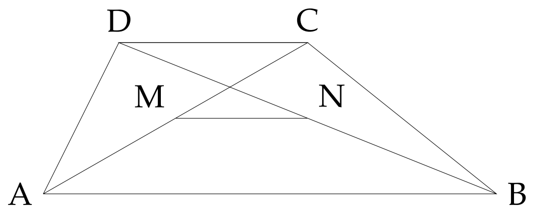
(a) Marque R e S na figura.

(b) Escreva $\overrightarrow{RS}$ em função de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$.

14. Demonstre que o segmento que une os pontos médios dos lados não-paralelos de um trapézio é paralelo às bases, e sua medida é a semi-soma das medidas das bases. (Atenção: *não é suficiente* provar que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$, mas isso ajuda bastante).



15. Demonstre que o segmento que une os pontos médios das diagonais de um trapézio é paralelo às bases, e sua medida é a semi-diferença das medidas das bases. (Atenção: *não é suficiente* provar que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC})$, mas isso ajuda bastante).



16. Prove que as medianas de um triângulo são concorrentes em um ponto que as divide na razão de 2 para 1. (O ponto de encontro das medianas chama-se *baricentro* do triângulo.)

17. Prove que um quadrilátero é um paralelogramo se, e somente se, suas diagonais se cortam ao meio.

18. No triângulo ABC, P, Q e R são os pontos médios, respectivamente, de AB, BC e AC. O ponto O é um ponto qualquer do espaço. Demonstre que

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}.$$

(Sugestão: escreva $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ e $\overrightarrow{OR}$ em função de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$.)

Respostas

1. a(V), b(F), c(F), d(F) (considere o caso $B = C$), e(F), f(V), g(F) (considere o caso onde AB e CD são colineares), h(V),

2. $\overrightarrow{RQ} = -\frac{1}{3}\vec{x}$, $\overrightarrow{AN} = \vec{x} + \vec{y}$, $\overrightarrow{KD} = \vec{x} - \vec{y}$, $\overrightarrow{AT} = \frac{4}{3}\vec{x} + \frac{3}{2}\vec{y}$.

3. $\vec{z} = -\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{z} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - \vec{d}$, $\vec{z} = -\vec{a} + \vec{b}$

5. $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

6. $\overrightarrow{CD} = \vec{v} - \vec{w}$; $\overrightarrow{AC} = \vec{w} + 2\vec{v}$; $\overrightarrow{BD} = 3\vec{v} - \vec{w}$

7. $\overrightarrow{AC} = 2\vec{a} - \vec{b}$; $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}(2\vec{a} + \vec{b})$;

9. $\overrightarrow{AX} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{c}$, $\overrightarrow{FX} = \frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{c}$

10. $\overrightarrow{AF} = \frac{8}{23}\overrightarrow{AD} + \frac{6}{23}\overrightarrow{AB}$

11. $\lambda = \frac{1}{3}$

12. $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{7}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BQ} = -\frac{40}{49}\overrightarrow{AB} + \frac{12}{49}\overrightarrow{AC}$

13. $\overrightarrow{RS} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$