3)

d) $f(x) = \sqrt{\sqrt{1+x} - x}$

$\sqrt{\ }$ só está bem definida para números não negativos. ($\mathbb{R}_+$)

Sendo assim, precisamos impor que:

(I) $1+x \geq 0$ e (II) $\sqrt{1+x} - x \geq 0$.

A condição I, implica que

$1+x \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$

Ou seja, (I) é satisfeita p/ todo $x \geq -1$

Agora precisamos determinar p/ quais valores de x, vale

(II) $\sqrt{1+x} - x \geq 0$, já considerando a restrição $x \geq -1$.

• $\sqrt{1+x} - x \geq 0$

Considere a equação $\sqrt{1+x} - x = 0$, vejamos quais são as soluções:

$\sqrt{1+x} - x = 0$

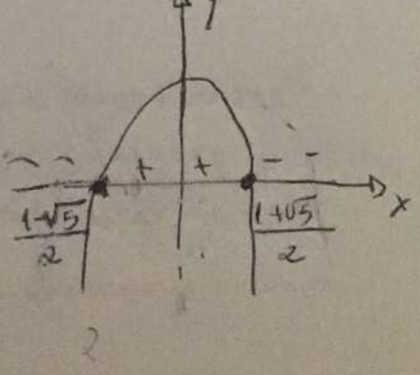
$\Rightarrow \sqrt{1+x} = x$ elevando ao quadrado

$\Rightarrow 1 + x = x^2$

$\Rightarrow -x^2 + x + 1 = 0$

↳ raízes $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$



Voltando à inequação $\sqrt{1+x} - x \geq 0$

i.e., $\sqrt{1+x} \geq x$

Temos dois casos:

1º Se $x \geq \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ então

$$\sqrt{1+x} \geq x$$

elevando ao quadrado

$$\Rightarrow 1+x \geq x^2$$

pelo feito anteriormente, a solução é $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$,

2º Se $x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ então $\left(\text{i.e., } -1 \leq x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

$$\sqrt{1+x} \geq x$$

elevando ao quadrado

$$\Rightarrow 1+x < x^2$$

pelo feito na página anterior, a solução está em $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ e $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$

como $-1 \leq x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, a solução no 2º caso é

$$\left[-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

A solução final é a união das soluções:

$$\left[-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$$